BOSWELL-BÈTA

James Boswell Examen

VWO Wiskunde A – Voorbeeldexamen 1

Correctiemodel

Datum:	
Tijd:	3 uur
Aantal vragen:	6
Aantal subvragen:	24
Aantal bijlagen:	0
Totaal aantal punten:	72

Vakspecifieke regels voor de beoordeling

1. Voor elke rekenfout wordt 1 scorepunt in mindering gebracht tot het maximum van het aantal scorepunten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.
2. Indien in een antwoord een gevraagde verklaring, uitleg, afleiding of berekening ontbreekt dan wel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven. Dit geldt ook bij vragen waarbij de kandidaten de grafische rekenmachine (GR) gebruiken. Bij de betreffende vragen geven de kandidaten een toelichting waaruit blijkt hoe zij de GR hebben gebruikt (die in ieder geval bestaat uit vermelding van de ingevoerde formule(s) (of lijst(en)), de gebruikte optie(s) en het resultaat).
3. Als de kandidaat bij de beantwoording van een vraag een notatiefout heeft gemaakt en als gezien kan worden dat dit verder geen invloed op het eindantwoord heeft, dan wordt hiervoor *geen* scorepunt in mindering gebracht. Bij gebrek aan deze zichtbaarheid zal wél puntenaftrek moeten volgen.
4. Een fout in de uitwerking van een vraag wordt maar één keer aangerekend, tenzij daardoor de vraag aanzienlijk vereenvoudigd wordt en/of tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.
5. Een zelfde fout in de beantwoording van verschillende vragen moet steeds opnieuw worden aangerekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.
6. Indien slechts één voorbeeld, reden, uitwerking of andersoortig antwoord wordt gevraagd, wordt uitsluitend het eerst gegeven antwoord beoordeeld; indien meer dan één voorbeeld, reden, uitwerking of andersoortig antwoord gevraagd wordt, worden uitsluitend de eerst gegeven antwoorden beoordeeld, tot maximaal het gevraagde aantal.
7. Als de kandidaat bij het eindantwoord geen eenheid heeft gegeven en deze wel bij het antwoord hoort, dan wordt 1 scorepunt in mindering gebracht, tenzij de eenheid al in de vraag vermeld is.
8. Als bij een vraag doorgerekend wordt met afgeronde tussenantwoorden en dit leidt tot een ander eindantwoord dan wanneer doorgerekend is met niet-afgeronde tussenantwoorden, dan wordt bij de betreffende vraag 1 scorepunt in mindering gebracht. Tussenantwoorden mogen wel afgerond *genoteerd* worden.
Uitzondering hierop zijn die gevallen waarin door de context wordt bepaald dat tussenantwoorden moeten worden afgerond.
De aftrek voor hierboven genoemde afrondfouten en/of fouten bij het afronden van het eindantwoord bedraagt voor het hele examen <u>maximaal 2 scorepunten</u>.

Toelichting bij vakregel **8.**
Het gedwongen afronden van tussenantwoorden kan onder andere (maar niet uitsluitend) in de volgende situaties voorkomen:

- het geldbedrag van een afzonderlijk product moet worden afgerond op twee decimalen;
- het aantal personen, dingen, etc. In een concrete situatie (dus bijvoorbeeld niet een gemiddelde of een verwachtingswaarde) moet worden afgerond op helen.

Het gedwongen hanteren van een minimale nauwkeurigheid van het antwoord kan onder andere (maar niet uitsluitend) in de volgende situaties voorkomen:

- het antwoord wijkt bij een beperkte nauwkeurigheid niet af van een triviale uitkomst. Dit kan bijvoorbeeld het geval zijn bij het afronden van een groeifactor of een kans naar 0 of 1. Een kans van $\left(\frac{1}{6}\right)^5$ mag bijvoorbeeld worden afgerond tot $0{,}0001$, maar niet tot $0{,}000$.

Het gedwongen naar boven of naar beneden afronden van antwoorden (al dan niet tegen de afrondregels in) kan onder andere (maar niet uitsluitend) in de volgende situaties voorkomen:

- uit de formulering van de vraag volgt dat een minimale of maximale hoeveelheid is gevraagd (bijvoorbeeld: ‘Hoe ver moet een atlete *ten minste* springen om een bepaald aantal punten te halen?’)

Opgave 1: Schaatsen

<table>
<tr><td>a</td><td>$\binom{7}{3} = 35$ volgordes.
Als de kandidaat het aantal combinaties van (3 of 4) uit 8 berekent maximaal één punt toekennen aan dit onderdeel.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>b</td><td>Als je Sven en Kjeld als één deelnemer telt, zijn er $4! = 24$ verschillende treintjes.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Sven en Kjeld kunnen onderling nog op $(2! =)$ 2 manieren worden gerangschikt.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Het antwoord: $2 \cdot 24 = 48$ treintjes.
Als de kandidaat met verkeerde getallen rekent, maar wél de vermenigvuldigingsregel correct toepast, één punt toekennen voor dit onderdeel.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>c</td><td>$Y =$ het aantal wedstrijdjes dat Rafa wint.
Inzicht dat geldt: $X \sim Bin(5; 0{,}6)$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>$P(Y > 2) = 1 - binomcdf(5, 0.6, 2) \approx 0{,}683$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>d</td><td>$P(X = 3) = P(RRR) + P(PPP) = 0{,}6^3 + 0{,}4^3 = 0{,}28$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>De kans $P(X = 4)$ berekenen.

Manier 1: (met de complementregel)
$P(X = 4) = 1 - P(X = 3) - P(X = 5) = 1 - 0{,}28 - 0{,}3456 = 0{,}3744$.

Manier 2: (directe berekening)
$P(X = 4) = 3 \cdot P(PRRR) + 3 \cdot P(RPPP) = 3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^3 + 3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}3744$.</td><td>1

1</td></tr>
<tr><td></td><td>De kansverdeling van X is:<table><tr><td>k</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>$P(X = k)$</td><td>0,28</td><td>0,3744</td><td>0,3456</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$E(X) = 3 \cdot 0{,}28 + 4 \cdot 0{,}3744 + 5 \cdot 0{,}3456$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Het antwoord: 4,1 rondjes.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>e</td><td>Inzicht dat de reden (groeifactor) 1,007 is.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>$u_n = 30{,}4 \cdot 1{,}007^{n-1}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>f</td><td>Manier 1:</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Het berekenen van het benodigde aantal seconden voor 7 volledige rondjes:
$\left(\sum_{i=1}^{7} u_n = \frac{u_8 - u_1}{1{,}007 - 1} =\right) \frac{30{,}4 \cdot 1{,}007^7 - 30{,}4}{0{,}007} \approx 217{,}3$</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>De totale tijd is dus $217{,}3 + 20{,}6 = 237{,}9$ seconden, dus ze doet er minder dan 4 minuten over (want $237{,}9 < 240$).</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Manier 2:</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Het berekenen van het benodigde aantal seconden voor 7 volledige rondjes:
$u_1 + u_2 + \cdots + u_7 = 30{,}4 + 30{,}6 \ldots + \ \ldots \ + 31{,}6 \ldots \approx 217{,}3$
(waarbij alle individuele termen zijn berekend dan wel met behulp van een tabel in de grafische rekenmachine zijn bepaald)</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>De totale tijd is dus $217{,}3 + 20{,}6 = 237{,}9$ seconden, dus ze doet er minder dan 4 minuten over (want $237{,}9 < 240$).</td><td>1</td></tr>
</table>

Opgave 2: Woordenschat

a	*Manier 1:*	
	$g_{\text{jaar}} = \mathrm{e}^{0{,}239}\ (= 1{,}269\ \ldots)$	1
	$g_{\text{maand}} = (\mathrm{e}^{0{,}239})^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}020$	1
	Dus de woordenschat groeit iedere maand met 2,0%.	1
	Manier 2:	
	Na één maand is de woordenschat gelijk aan $17\,000 \cdot \mathrm{e}^{0{,}239 \cdot \frac{1}{12}}$ $(\approx 17\,342)$	1
	$\frac{17\,342 - 17\,000}{170\,000} \cdot 100\% \approx 2{,}0\%$ (dus de woordenschat groeit iedere maand met 2,0%).	2
b	Inzicht dat de vergelijking $17\,000 \cdot \mathrm{e}^{0{,}239t} = 42\,500$ moet worden opgelost.	1
	Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost. • algebraïsch: ○ $\mathrm{e}^{0{,}239t} = \frac{42\,500}{17\,000} = 2{,}5$ ○ $0{,}239t = \ln(2{,}5)$ ○ $t = \frac{1}{0{,}239} \cdot \ln(2{,}5) \approx 3{,}8$ • grafisch-numeriek: ○ $Y_1 = 17\,000 \cdot \mathrm{e}^{0{,}239x}$ en $Y_2 = 42\,500$ ○ Optie intersect geeft $x \approx 3{,}8$ (of nauwkeuriger)	1 1
	42 500 woorden hoort bij $(12 + 3 =)$ 15 jaar en $0{,}8 \cdot 12 \approx 10$ maanden.	1
	Humam is dus 22 maanden jonger dan hij volgens de formule zou zijn.	1
c	$a\left(= \frac{\Delta W}{\Delta t}\right) = \frac{45000 - 17000}{21 - 12} \approx 3111$	1
	b is woordenschat op 12-jarige leeftijd: 17 000, dus $W_K = 3111t + 17\,000$	1
d	Inzicht dat moet gelden: $17\,000 \cdot \mathrm{e}^{0{,}239t} = 2(3111t + 17\,000)$	1
	Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost. • grafisch-numeriek: ○ $Y_1 = 17\,000 \cdot \mathrm{e}^{0{,}239x}$ en $Y_2 = 2 \cdot (3111x + 17\,000)$ ○ Optie intersect geeft $x \approx 6$	1
	Het antwoord: op 18-jarige leeftijd.	1

Opgave 3: Differentiëren

a	Toepassen van de quotiëntregel: $g'(x) = \dfrac{x \cdot 10 \cdot \frac{1}{x} - 10\ln(x) \cdot 1}{x^2} \left(= \dfrac{10 - 10\ln(x)}{x^2}\right)$	2
	(Er geldt $k: y = ax + b$) $a = g'(1) = \frac{10-10\ln(1)}{1^2} = 10.$	1
	Invullen van coördinaten van $A(1,0)$ in $y = 10x + b$ geeft: $0 = 10 \cdot 1 + b$ dus $b = -10.$ Dus $k: y = 10x - 10$	1
b	Toepassen van de productregel: $h'(x) = [\mathrm{e}^{-0,75x}]' \cdot x^3 + \mathrm{e}^{-0,75x} \cdot [x^3]'$	1
	Toepassen van de kettingregel: $[\mathrm{e}^{-0,75x}]' = -0,75\mathrm{e}^{-0,75x}$	1
	$h'(x) = -0,75\mathrm{e}^{-0,75x} \cdot x^3 + \mathrm{e}^{-0,75x} \cdot 3x^2 \left(= \mathrm{e}^{-0,75x}(3x^2 - 0,75x^3)\right)$	1
	Inzicht dat de vergelijking $h'(x) = 0$ moet worden opgelost.	1
	Beschrijven hoe de vergelijking kan worden opgelost. • algebraïsch: ○ $(\mathrm{e}^{-0,75x} = 0 \vee)\ 3x^2 - 0,75x^3 = 0$ ○ ($\mathrm{e}^{-0,75x} = 0$ heeft geen oplossingen) $x^2 \cdot (3 - 0,75x) = 0$ ○ $x^2 = 0 \vee 3 - 0,75x = 0$ ○ $x = 0 \vee x = \frac{3}{0,75} = 4$ • grafisch-numeriek: ○ $Y_1 = \mathrm{e}^{-0,75x}(3x^2 - 0,75x^3)$ (of een andere vorm) ○ Optie zero geeft $x = 0$ en $x = 4$	1 1
	Uit een plot van de grafiek van h blijkt dat: (Bij $x = 0$ heeft de grafiek van h geen top) Bij $x = 4$ heeft h een maximum	1

Opgave 4: Komkommers

a	$X =$ lengte van een komkommer (in cm). $X \sim Norm(36{,}2; 5{,}7)$	
	$P(X \geq 25) = normalcdf(25, 10^{99}, 36.2, 5.7) \approx 0{,}975.$	1
	Dus 97,5% van zijn komkommers voldoet aan de norm.	1
b	$Y =$ gewicht van een komkommer (in grammen). $Y \sim Norm(216{,}5; \sigma)$	
	Inzicht dat moet gelden $P(Y < 180) = 0{,}10$.	1
	$Y_1 = normalcdf(-10^{99}, 180, 216.5, X)$ $Y_2 = 0{,}10$ De optie intersect geeft $X \approx 28{,}5$.	1
	Dus $\sigma = 28{,}5$ (gram.)	1
c	$p =$ de kans dat een verkochte komkommer 'krom' is. Als de kandidaat niet expliciet opschrijft wat p voorstelt, één punt aftrekken.	
	$H_0: p = 0{,}30$	1
	$H_a: p > 0{,}30$	1
d	$Z =$ het aantal verkochte kromme komkommers in het experiment.	
	Inzicht dat als H_0 waar zou zijn, geldt dat $Z \sim Bin(2958;\ 0{,}30)$.	1
	De p-waarde / overschrijdingskans berekenen: $P(X \geq 1053) \quad = 1 - P(X \leq 1052) = 1 - binomcdf(2958, 0.30, 1052)$ $\approx 3{,}48 \cdot 10^{-11}$	1 1
	$3{,}48 \cdot 10^{-11} < 0{,}05$. (dus H_0 wordt verworpen en H_a is aangetoond) Er is (bij $\alpha = 0{,}05$) aangetoond dat de boodschap de verkoop van kromme komkommers stimuleert.	1

Opgave 5: Massa en metabolisme

a	*Manier 1:*	
	Als het gewicht $\frac{650}{11,5} = 56,52 \ldots$ keer zo groot wordt, wordt het energieverbruik $\frac{530}{25,6} = 20,70 \ldots$ keer zo groot.	1
	$56,52 \ldots \neq 20,70 \ldots$, dus het verband is niet recht evenredig.	1
	Manier 2:	
	De verhoudingen tussen het energieverbruik en het gewicht zijn: $\frac{25,6}{11,5} = 2,226 \ldots$ en $\frac{530}{650} = 0,185 \ldots$ (W/kg)	1
	$2,226 \ldots \neq 0,185 \ldots$, dus het verband is niet recht evenredig.	1
	Manier 3:	
	Voor een recht evenredig verband moet gelden $E = c \cdot m$ Uit $m = 11,5$ en $E = 25,6$ volgt $c = \frac{25,6}{11,5} = 2,226 \ldots$ (dus $E = 2,226 \ldots \cdot m$)	1
	$m = 650$ geeft dan $E = 2,226 \ldots \cdot 650 \approx 1447 \neq 530$, dus het verband is niet evenredig.	1
b	Inzicht dat de vergelijking $25,6 = 4,1 \cdot 11,5^a$ moet worden opgelost.	1
	Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost. • algebraïsch: ○ $11,5^a = \frac{25,6}{4,1}$ ○ $a = {}^{11,5}\log\left(\frac{25,6}{4,1}\right)$ • grafisch-numeriek: ○ $Y_1 = 4,1 \cdot 11,5^x$ en $Y_2 = 11,5$ ○ Optie intersect geeft $x \approx 0,750$ (of nauwkeuriger).	1 1
	Het antwoord: $a \approx 0,750$.	1
c	Inzicht dat de vergelijking $100 = 4,1 \cdot m^{0,75(0)}$ moet worden opgelost.	1
	Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost. • algebraïsch: ○ $m^{0,75} = \frac{100}{4,1}$ ○ $m = \left(\frac{100}{4,1}\right)^{\frac{1}{0,75}}$ • grafisch-numeriek: ○ $Y_1 = 4,1 \cdot x^{0,75}$ en $Y_2 = 100$ ○ Optie intersect geeft $x \approx 70,7$ (of nauwkeuriger).	1 1
	Het antwoord: 71 (kg) (op gehelen)	1
d	$\log(E) = \log(4,1) + \log(m^{0,75})$ (toepassen van ${}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(ab)$)	1
	$\log(E) = \log(4,1) + 0,75 \cdot \log(m)$ (toepassen van ${}^g\log(a^k) = k \cdot {}^g\log(a)$)	1
	$\log(E) \approx 0,61 + 0,75 \cdot \log(m)$	1
e	$E_r = \frac{4,1 \cdot m^{0,75}}{m}$	1
	$E_r = 4,1 \cdot \frac{m^{0,75}}{m} = 4,1 \cdot m^{0,75-1} = 4,1 \cdot m^{-0,25}$ Indien de kandidaat alleen $E_r = 4,1 \cdot m^{-0,25}$ heeft opgeschreven, geen punt aan dit onderdeel toekennen.	1
f	$E_r'(m) = -0,25 \cdot 4,1 \cdot m^{-1,25} (= -1,025 \cdot m^{-1,25})$	1
	De uitkomst van $m^{-1,25}$ is altijd positief.	1
	De uitkomst van $-1,025 \cdot m^{-1,25}$ is dus altijd negatief. $E_r'(m)$ is dus voor alle waarden van m negatief (en dus daalt de grafiek van E_r voor alle waarden van m).	1

Opgave 6: Uilen en muizen

<table>
<tr><td>a</td><td>Manier 1:</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>(De ongelijkheid $1000 + 200 \cdot \sin\left(\frac{1}{12}\pi t\right) > 1150$ moet worden opgelost.)</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Beschrijven hoe de vergelijking $1000 + 200 \cdot \sin\left(\frac{1}{12}\pi t\right) = 1150$ kan worden opgelost.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Op het domein $[0,12]$ zijn de oplossingen $t \approx 3{,}24$ en $t \approx 8{,}76$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Dus in maanden mei tot en met augustus zijn er de hele maand meer dan 1150 muizen in het gebied.</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Manier 2:</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>(De ongelijkheid $1000 + 200 \cdot \sin\left(\frac{1}{12}\pi t\right) > 1150$ moet worden opgelost.)</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$Y_1 = 1000 + 200 \cdot \sin\left(\frac{1}{12}\pi x\right)$
Uit de tabel volgt:
<table>
<tr><th>t</th><th>$M(t)$</th></tr>
<tr><td>3</td><td>1141</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1173</td></tr>
<tr><td>8</td><td>1173</td></tr>
<tr><td>9</td><td>1141</td></tr>
</table>
(Let op: de overgangen moeten hier worden vermeld.)</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Dus in maanden mei tot en met augustus zijn er de hele maand meer dan 1150 muizen in het gebied.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>b</td><td>$a = \frac{400+200}{2} = 300$ (dit is de evenwichtsstand)
$b = 400 - 300 = 100$ (dit is de amplitude)</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>De periode is 24 maanden (net als bij de grafiek van $M(t)$),
dus $c = \frac{2\pi}{24}$ ($= \frac{1}{12}\pi$ ($\approx$ 0,26 (of nauwkeuriger))</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>$d = 6$ (plus of min een veelvoud van 24). Dit is de t-coördinaat van een punt waar de grafiek stijgend door de evenwichtslijn gaat.</td><td>1</td></tr>
</table>